

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ДГТУ)

Факультет Энергетики и нефтегазопромышленности

Кафедра Автоматизация и математическое моделирование в нефтегазовом
комплексе

Конспект лекций

По дисциплине Моделирование объектов с распределенными параметрами

По направлению 150404 Автоматизация технологических процессов и
производств

Форма обучения заочная.

Ростов-на-Дону
2023

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамических систем достаточно часто пренебрегают их размерами, считая, что речь идёт о некоторых материальных точках, обладающих определёнными физическими свойствами, но не имеющих геометрических размеров. В то же время, существует широкий класс объектов, для которых такое пренебрежение приводит к качественно неверным результатам моделирования. Изучение подобных объектов - с распределёнными параметрами - должно осуществляться с учётом их пространственной протяжённости.

Решение задачи моделирования объекта с распределёнными параметрами, адекватно описывающего поведение функции состояния пространственно-протяжённого объекта, лежит в основе последующего синтеза системы управления таким объектом. Существуют различные подходы к построению математических моделей объектов с распределёнными параметрами, среди которых можно выделить следующие способы описания поведения объекта:

- с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, математически формализующих основные законы сохранения вещества и энергии в элементарном объёме;
- с помощью линейных интегральных преобразований, ядра которых отражают внутренние свойства объекта по отношению к действующим на объект внешним воздействиям;
- на основе структурной теории распределённых систем, позволяющей с помощью передаточных функций типовых объектов с распределёнными параметрами получить структуру сложного объекта или системы;
- с помощью модального представления в виде разложения функции состояния в бесконечный ряд по собственным функциям,

определяемым внутренней структурой объекта с соответствующими коэффициентами

- методами приближённого моделирования путём упрощённого
- представления самих исходных дифференциальных уравнений объекта, или основанных на приближённом представлении точных решений уравнений в частных производных;
- и другие.

В данном учебном пособии затрагивается лишь малая часть обширной проблемы моделирования ОРП, основанная на решении одного из видов уравнений математической физики - уравнения теплопроводности (Фурье). Методы решения краевых задач преподносятся с практической инженерной точки зрения, основной акцент делается на физической сущности преобразований. Строгого математического обоснования используемых методов и применяемых приемов не приводится. Показано как правильно сформулировать математическую постановку краевой задачи для тел стандартной (канонической) формы. Приведён способ решения краевой задачи на основе операционного метода, а также программная реализация полученного решения в среде программирования Matlab, получены и проанализированы основные зависимости, отражающие поведение выходной величины - функции состояния объекта (температурного поля) во времени и в пространстве при заданном граничном управлении.

Приведен ряд вариантов для самостоятельного моделирования температурного поля при различных управляющих воздействиях по граничным условиям.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБЪЕКТАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Поведение во времени типовых объектов, рассматриваемых в «классической» теории автоматического управления, характеризуется совокупностью конечного числа величин, и их описание в той или иной мере строится на системе конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные объекты называются объектами с сосредоточенными параметрами, а системы управления ими - системами с сосредоточенными параметрами.

Описание таких объектов не учитывает влияние пространственной протяжённости в пределах конечных геометрических размеров рассматриваемого объекта на его характеристики. Во многих распространённых на практике случаях объекты могут быть отнесены к классу объектов с сосредоточенными параметрами при сохранности адекватности описания их качественных свойств.

В то же время существует класс объектов, которые принципиально не могут быть отнесены к объектам с сосредоточенными параметрами без потери их качественных особенностей. Это объекты, характеристики которых зависят не только от времени, но и от пространственных координат, изменяющихся в пределах области, заданной геометрическими размерами тела.

К таким объектам относится большое число реальных технологических процессов, поведение которых основывается на действии физических полей различной природы (температурных, электромагнитных полей, полей потенциалов, концентраций и т.д.).

В этом случае принято говорить не о некотором векторе управляемых величин, зависящих от одной переменной - времени t , а о некоторой функции состояния, зависящей и от времени, и от пространственных координат. Полное описание объекта требует знания поведения его функции состояния во всей заданной пространственной области объекта. Т.е. необходимо

рассматривать бесконечное число управляемых величин, каждая из которых характеризует поведение объекта в некоторой фиксированной точке.

В настоящее время большое число актуальных практических задач управления различными физическими процессами из области теплопроводности, гидродинамики, акустики, электродинамики, диффузии и т.д. решается на основе математического аппарата теории управления объектами с распределёнными параметрами. В данном учебном пособии рассматриваются задачи получения математического описания объекта с распределёнными параметрами на примере процессов переноса тепла.

1.2. ТИПОВЫЕ ОБЪЕКТЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Изучение процесса теплопроводности, т.е. процесса передачи тепла от одной части тела к другой или от одного тела к другому, находящемуся в соприкосновении с первым, по своей сущности требует применения специального математического аппарата.

Процесс теплопередачи, как и всякое физическое явление, происходит во времени и в пространстве и характеризуется (в общем случае) нестационарной пространственно-временной функцией температуры $f(x, y, z, t)$, где x, y, z - пространственные координаты в декартовой системе, t - время.

Совокупность значений температуры по всему объему рассматриваемого тела в отдельный момент времени называется температурным полем. В теории теплопроводности различают стационарное и нестационарное температурное поле.

Стационарное температурное поле — это такое поле, температура которого в любой точке объема не изменяется во времени, а является функцией только пространственных координат. Такое поведение свойственно установившемуся режиму.

Нестационарное температурное поле — это поле, температура которого изменяется не только в пространстве, но и с течением времени, и является функцией, как пространственных координат, так и времени. Такое поведение описывает неустановившееся состояние, переходный режим.

В общем случае, температурное поле $T = T(x, y, z, t)$, соответствующее уравнению

$$T(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \quad (1)$$

является пространственно распределённым (трёхмерным).

Описание процесса теплопроводности, как и многих других физических процессов, может быть осуществлено на основе дифференциальных уравнений в частных производных, называемых уравнениями математической физики.

Процесс распространения тепла в однородном изотропном¹ теле описывается уравнением теплопроводности, задающим зависимость между температурой, временем и координатами бесконечно малого объёма.

В типичной ситуации рассматривается нестационарный процесс теплопередачи в твердом теле, осуществляющийся по нормали к изотермическим² поверхностям, а теплофизические коэффициенты считаются независимыми от координат и времени. Температура в каждой точке тела $M(x, y, z)$ в любой момент времени t определяется функцией $T = T(x, y, z, t)$.

Такой процесс описывается дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка - так называемым уравнением теплопроводности или уравнением Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad (2)$$

¹ *Изотропный материал* имеет одинаковые физические свойства во всех направлениях.

² *Изотермическая поверхность* содержит все точки поля с одинаковой температурой.

где a - коэффициент температуропроводности, который зависит от физических свойств материала, а выражение

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3)$$

является оператором Лапласа в декартовой системе координат для трёхмерной пространственной области определения температурного поля (1). В упрощённых частных случаях, при возможности пренебречь распространением тепла по одной или двум координатам, рассматривается двумерное или одномерное поле соответственно.

В уравнении теплопроводности (2) коэффициент температуропроводности при постоянном объеме тела вычисляется как

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}, \left[\frac{м}{с^2} \right] \quad (4)$$

на основе теплофизических характеристик нагреваемого металла:

$\lambda, \left[\frac{Вт}{м \cdot ^\circ C} \right]$ – коэффициента теплопроводности;

$\rho, \left[\frac{кг}{м^3} \right]$ – плотности;

$c, \left[\frac{Дж}{кг \cdot ^\circ C} \right]$ – удельной теплоёмкости.

По своему физическому смыслу коэффициент a характеризует перенос внутренней энергии тела и является коэффициентом пропорциональности между плотностью потока тепла и градиентом объёмной концентрации внутренней энергии тела. Он численно равен количеству тепла, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, при перепаде объёмной концентрации внутренней энергии в $1 \text{ Дж}/м^3$ на единицу длины нормали.

Во многих тепловых процессах внутри тела могут действовать источники тепла, которые могут быть положительными и отрицательными. В

данном учебном пособии задачи на исследование процессов теплопередачи в телах с внутренними источниками не рассматриваются. Дополнительную информацию по этой тематике можно найти в литературе [1, 10].

В дальнейшем будем рассматривать нестационарное одномерное температурное поле (тепло распространяется в одном направлении, например в направлении оси x), без внутренних источников тепла, которое описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Ситуация, когда при моделировании распространения тепла учитывается только одна координата, вообще говоря, возникает в двух случаях:

1. При рассмотрении процесса передачи тепла по длине бесконечно тонкого стержня с теплоизолированной боковой поверхностью. Теплоизоляция подразумевает, что отток/приток тепла с боковой поверхности отсутствует (рис. 1, а), а отсутствие толщины стержня делает бессмысленным использование координат y и z . На практике толщиной стержня пренебрегают, если его длина в десять и более раз больше толщины.

2. При рассмотрении: процесса передачи тепла по толщине пластины, которая, в математически строгом определении принимается бесконечной по ширине и высоте (неограниченная пластина). На практике же, достаточно того, чтобы ширина и высота пластины были в десять и более раз больше толщины (рис. 1, б). В этом случае температуры в соседних точках, лежащих на некоторой плоскости $x = \xi$, т.е. с одинаковым значением координаты x , но с разными значениями координат y и z , будут одинаковы, а, значит, перепад температуры между ними будет равен нулю, т.е. $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x=\xi} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{x=\xi} =$

0. А, следовательно, и вторые производные $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{x=\xi} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{x=\xi}$ будут равны

нулю, таким образом, оператор Лапласа (3) вырождается до $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

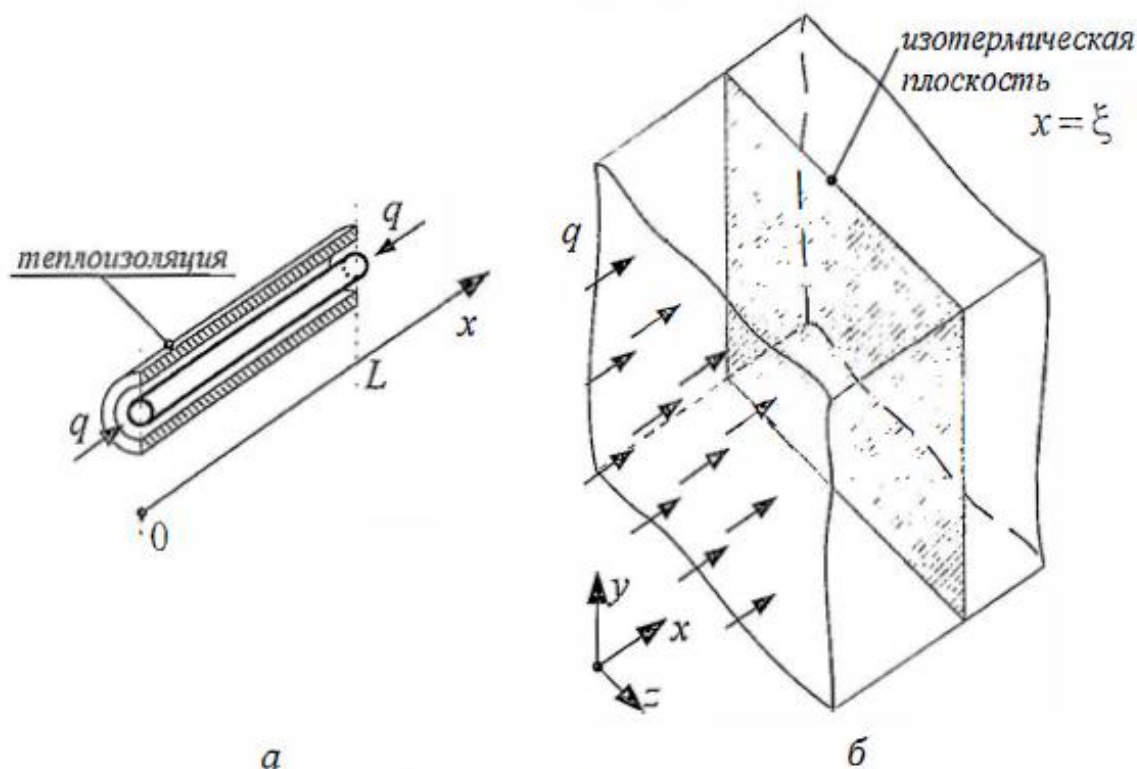


Рис. 1. Одномерная тепловая задача:
 q – тепловой поток на границе, влияющий на температурное поле тела

Уравнение теплопроводности (5) устанавливает связь между временными и пространственными изменениями температуры тела, т.е. математически описывает процесс передачи тепла внутри тела.

Такое уравнение имеет бесчисленное множество решений. Для решения конкретной физической задачи, расчёт температурного поля тела в любой момент времени, сформулированное уравнение должно удовлетворять некоторым дополнительным условиям однозначности определения его решений. Такими условиями являются начальное и граничные условия.

Совокупность начального и граничных условий называется краевыми условиями, а соответствующая задача, содержащая уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия, - краевой задачей.

Начальное условие задает распределение температур в начальный момент времени

$$T(x, t)|_{t=0} = T(x, 0) = f_0(x). \quad (6)$$

Во многих задачах начальное распределение принимается равномерным, т.е.

$$T(x, t)|_{t=0} = T(x, 0) = f_0 = const. \quad (7)$$

Граничные условия формулируются в виде закона взаимодействия данного тела с окружающей средой. В случае процесса теплообмена без внутренних источников тепла граничные условия исполняют роль управляющих воздействий, т.е. являются причиной изменения температурного распределения в рассматриваемом теле. В этом случае говорят о внешнем теплообмене (газовые печи, электрические печи сопротивления). В зависимости от способа задания температурного режима на границах тела, граничные условия могут быть различными. Рассмотрим основные типы граничных условий.

1.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Наиболее общий и наиболее сложный способ задания граничных условий описывает теплообмен между поверхностью твердого тела и окружающей средой - газом или жидкостью. Например, воздух нагревается от батареи отопления, его плотность уменьшается и он устремляется вверх, а на его смену приходят новые потоки холодного воздуха. Таким образом, возникает движение масс воздуха (конвекция), в результате чего батарея омывается всё новыми и новыми потоками. При этом количество тепла, отданного батареей на нагрев воздуха, зависит от разницы температур воздуха и поверхности самой батареи. Другой пример - принудительный обдув радиатора в системе охлаждения процессора.

Подобный теплообмен встречается повсеместно и называется конвективным теплообменом. Он также имеет место и при нагреве холодного тела потоком газа или жидкости более высокой температуры.

Закон конвективного теплообмена может быть упрощённо описан в виде закона Ньютона: количество тепла, передаваемого в единицу времени поверхности тела (тепловой поток $q(t)$) от окружающей среды с температурой $T_c(t)$ в процессе нагрева прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и окружающей средой:

$$q(t) = \alpha [T_c(t) - T_\Gamma(t)], \quad (8)$$

где $\alpha, \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С}} \right]$ - коэффициент теплоотдачи, или коэффициент теплообмена, численно равен количеству тепла, отдаваемого (или получаемого) единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой в 1°С ;

$T_\Gamma(t)$ – температура поверхности тела³;

Γ – граница тела.

Физический смысл выражения (8) заключается в том, что чем больше разность температур между окружающей средой и температурой поверхности тела, тем быстрее идёт нагрев. С уменьшением разности температур в процессе нагрева, скорость нагрева становится всё ниже и ниже. При равных температурах нагрев вообще не происходит. Таким образом, соблюдается главное и очевидное условие: при конвективном теплообмене тело не может нагреться выше температуры окружающей среды.

Тепловой поток через поверхность внутрь тела при нагреве равен произведению коэффициента теплопроводности λ и производной по направлению вектора нормали \vec{n} к поверхности тела: $\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)_\Gamma$.

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)_\Gamma = \alpha (T_c(t) - T_\Gamma(t)), \quad t \in (0, \infty). \quad (9)$$

Иногда выражение (8) может быть записано иначе:

³ Символ Γ в индексе обозначает, что существует некоторая поверхность Γ , заданная произвольным образом, являющаяся границей твёрдого тела и, если точка принадлежит ей, то это граничная точка.

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Gamma} = \alpha (T_c(t) - T(M, t)), \quad M \in \Gamma, \quad t \in (0, \infty),$$

но его суть от этого не меняется.

В случае, когда рассматривается температурное поле тела канонической формы (пластина, цилиндр, шар), вектор нормали поверхности совпадает, либо противоположен по направлению с одной из осей системы координат, в которых это тело описывается. Тогда можно от производной по направлению вектора нормали перейти к производной по пространственной координате. Для одномерного случая (рис. 1) граница тела определяется, фактически, двумя плоскостями: при $x = 0$ и при $x = L$. При этом на левой границе ($x = 0$) вектор нормали к поверхности будет направлен противоположно к оси Ox . А на правой границе ($x = L$) - сонаправлен с осью Ox . Здесь L - длина нагреваемого стержня или толщина бесконечной пластины. Тогда граничное условие (9) записывается следующим образом:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha (T_c(t) - T(0, t)), \quad t \in (0, \infty); \quad (10)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = \alpha (T_c(t) - T(L, t)), \quad t \in (0, \infty). \quad (11)$$

Знак минус в (10) появляется как раз из-за того, что вектор нормали на левой границе ($x = 0$) направлен в противоположную оси Ox сторону.

Такой способ задания граничных условий называется в литературе **граничными условиями третьего рода (ГУЗ)**. Этот способ является наиболее приближенным к реальной ситуации, но, одновременно, и наиболее сложным для поиска аналитического решения. Более простые случаи (граничные условия первого и второго рода) являются частными случаями ГУЗ и речь о них пойдёт ниже.

Краевая задача теплопроводности третьего рода для стержня длины L записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,\infty); \quad (12)$$

$$T(x,t)|_{t=0} = f_0(x), \quad x \in [0,L]; \quad (13)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (T_c(t) - T(0,t)), \quad t \in (0,\infty); \quad (14)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha (T_c(t) - T(L,t)), \quad t \in (0,\infty). \quad (15)$$

Если в задаче (12)-(15) принять, что отношение $\frac{\lambda}{\alpha} \rightarrow 0$ (например, если коэффициент теплообмена очень велик), то левые части уравнений (14)-(15) станут равны нулю:

$$0 = -\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = T_c(t) - T(0,t), \quad t \in (0,\infty); \quad (14a)$$

$$0 = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = T_c(t) - T(L,t), \quad t \in (0,\infty), \quad (15a)$$

и тогда граничные условия будут определять непосредственно температуру тела на границе. Такие граничные условия называется **граничными условиями первого рода** (ГУ1).

Краевая задача теплопроводности первого рода для стержня длины L , с теплоизолированной боковой поверхностью, при заданных законах изменения температуры на границах стержня, имеет вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,\infty); \quad (16)$$

$$T(x,t)|_{t=0} = f_0(x), \quad x \in [0,L]; \quad (17)$$

$$T(0,t) = f_1(t), \quad t \in (0,\infty); \quad (18)$$

$$T(L,t) = f_2(t), \quad t \in (0,\infty). \quad (19)$$

Простейший частный случай граничных условий первого рода - температура на поверхности тела поддерживается постоянной на протяжении всего процесса теплообмена, т.е. $T(M, t) = f(t) = const$, $M \in \Gamma$. Такая ситуация может возникать при теплообмене по закону Ньютона между телом с бесконечно большим коэффициентом теплообмена и окружающей средой с

постоянной температурой $T_c(t) = \text{const}$ или может осуществляться при помощи специальных устройств, искусственно поддерживающих постоянную температуру на поверхности тела [1].

На практике такая ситуация не встречается, однако аналитическое решение краевой задачи с ГУ1 находится гораздо проще, чем при остальных ГУ, поэтому в ряде случаев, когда имеется возможность пренебречь неточностью описания граничных условий, используется упрощенная постановка задачи моделирования с ГУ1.

Граничное условие второго рода (ГУ2) возникает в высокотемпературных печах при теплопередаче излучением, когда требуемая температура изделия значительно меньше температуры излучающих поверхностей, и влиянием температуры поверхности нагреваемого тела на величину внешнего теплового потока (конвективной теплопередачей) можно пренебречь. Поверхность нагреваемого тела поглощает тепловой поток от излучающих его нагретых стен и свода печи.

Граничное условие второго рода можно получить из ГУ3, если принять, что влияние температуры поверхности нагреваемого тела на поток тепла несущественно, т.е. в (14)-(15) принять, что

$$-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_1(t), \quad t \in (0, \infty); \quad (146)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = q_2(t), \quad t \in (0, \infty). \quad (156)$$

Для стержня длины L краевая задача теплопроводности второго рода запишется в следующем виде

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty); \quad (20)$$

$$T(x,t)|_{t=0} = f_0(x), \quad x \in [0, L]; \quad (21)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_1(t), \quad t \in (0, \infty); \quad (22)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = q_2(t), \quad t \in (0, \infty). \quad (23)$$

В простейшем частном случае граничных условий второго рода тепловой поток является постоянной величиной. Такая ситуация возникает, когда все источники излучения можно заменить на один, характеризующийся некоторой средней температурой. Если температура поверхности тела значительно меньше средней температуры печи, тепловой поток может считаться постоянным.

Граничное условие четвёртого рода соответствует теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температура тел в месте контакта одинакова, или конвективному теплообмену тела с жидкостью.

В этих случаях соотношение равенства температур

$$T_1(M, t)|_\Gamma = T_2(M, t)|_\Gamma, \quad t \in (0, \infty) \quad (24)$$

дополняется соотношением равенства тепловых потоков в области прикосновения

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right) \Big|_\Gamma = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right) \Big|_\Gamma, \quad t \in (0, \infty), \quad (25)$$

где Γ - поверхность соприкосновения тел;

$T_1 = T_1(x, y, z, t) = T_1(M, t)$ - температура первого тела;

$T_2 = T_2(x, y, z, t) = T_2(M, t)$ - температура второго тела.

Таким образом, при существенно нестационарном конвективном теплообмене для точного решения задачи необходимо использовать граничные условия четвертого рода. В то же время в большинстве

практических случаев достаточно использовать граничные условия третьего рода, дающие, хотя и приближенный, но достаточный результат.

Рассмотренные типы граничных условий охватывают реальные процессы теплообмена. Иногда граничные условия на разных частях границы задаются по-разному. В этом случае возникает смешанная краевая задача.

Самый распространённый случай возникновения смешанной краевой задачи - учёт условия симметрии. Например, при нагреве стержня (ГУЗ) при одинаковых условиях на обеих границах и нулевых начальных условиях, температурное поле будет вести себя симметрично относительно центра стержня. Тогда можно решить смешанную краевую задачу для стержня половинной длины с ГУЗ на одной границе и нулевыми ГУ2 на второй, а полученное решение затем отобразить относительно центра симметрии. Вот как будет выглядеть постановка смешанной задачи в описанном случае:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L/2), \quad t \in (0, \infty); \\ T(x,t)|_{t=0} &= 0, \quad x \in [0, L/2]; \\ -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(T_c(t) - T(0,t)), \quad t \in (0, \infty); \\ \lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L/2} &= 0, \quad t \in (0, \infty).\end{aligned}$$

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследованию задач математической физики и методам их решения посвящено множество работ.

Классические методы решения уравнений математической физики состоят в том, что находится совокупность частных решений, удовлетворяющих дифференциальному уравнению и граничным условиям, после чего на основании принципа наложения составляется сумма найденных частных решений, коэффициенты которых определяются из начального условия.

Наиболее распространенным из классических методов является метод разделения переменных. Классические методы не всегда удобны для практического применения, поэтому рассматриваться не будут.

Более эффективными и универсальными являются методы интегральных преобразований, которые разделяются на методы конечных интегральных преобразований и операционные методы. Основное удобство интегральных преобразований состоит в исключении пространственных или временных производных в уравнениях объекта в пространстве изображений, и замене операций дифференцирования по пространственным координатам или во времени на соответствующие алгебраические операции в уравнениях для изображений.

Исследование задач с конечной областью изменения пространственных переменных обусловили развитие методов конечных интегральных преобразований, идея которых состоит в применении интегрального преобразования по пространственной координате. При исследовании объектов стандартной геометрической формы в качестве ядер интегральных преобразований используются синус- и косинус- преобразования Фурье, преобразования Ханкеля и другие.

Универсальным методом решения задач математической физики является операционный метод (метод интегрального преобразования Лапласа), и далее решение задачи теплопроводности будет осуществляться с помощью этого метода.

Метод преобразования Лапласа состоит в том, что решение ищется не для самой функции времени (оригинала) $f(t)$, а для её изображения $\bar{f}(p)$.

Переход к изображению осуществляется при помощи интегрального преобразования Лапласа относительно переменной t :

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = L\{f(t)\}, \quad (26)$$

где p - комплексное число (параметр Лапласа).

Когда найдено решение задачи в изображениях, остаётся определить его оригинал, что выполняется с помощью обратного преобразования Лапласа в общем случае по формуле обращения

$$f(t) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \bar{f}(p) \cdot e^{pt} dp. \quad (27)$$

Контурное интегрирование (27), проходящее в комплексной плоскости $p = \xi + j\eta$ вдоль прямой $\sigma = \text{const}$, параллельной мнимой оси, осуществляется методами теории функций комплексного переменного, и в общем случае является самостоятельной сложной задачей.

В большинстве случаев, к которым относятся подавляющее количество типовых объектов, обратное преобразование Лапласа может быть выполнено на основе таблиц стандартных изображений.

Если изображение $\bar{f}(p)$ представляет собой отношение двух целых трансцендентных функций (обобщённых полиномов параметра p), и при этом полином знаменателя не содержит слагаемого с нулевой степенью параметра p

$$\bar{f}(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{b_1 p + b_2 p^2 + \dots}, \quad (28)$$

то по теореме разложения оригинал функции может быть определён как

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(p_n)}{\psi'(p_n)} \cdot e^{p_n t}, \quad (29)$$

Где p_n – простые корни функции $\psi(p)$.

Если изображение $\bar{f}(p)$ представляет отношение двух полиномов, причём степень полинома числителя $\varphi(p)$ меньше степени полинома знаменателя $\psi(p)$ и полином $\psi(p)$ имеет корни кратности k в точках p_m , то в этом случае теорема разложения имеет вид

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right\} = \sum_m \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow p_m} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\frac{\varphi(p)(p-p_m)^k}{\psi(p)} \cdot e^{pt} \right] \right\}, \quad (30)$$

где сумма берётся по всем корням $\bar{f}(p)$.

Следует отметить, что наибольшая трудность в решении уравнения теплопроводности при различных краевых условиях состоит в нахождении оригинала по полученному изображению $\bar{T}(x, p)$. Для большинства типовых объектов оказывается достаточным использование таблиц изображений соответствующих функций или теоремы разложения (в случае простых или кратных корней).

На основании изложенного, может быть предложена следующая методика решения краевых задач:

1. Выполняется преобразование Лапласа (26) по времени к диф-ференциальному уравнению теплопроводности (5)

$$L \left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right\} = L \left\{ a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right\}, \quad (31)$$

где изображение температурного поля определяется как

$$\bar{T}(x, p) = L \{ T(x, t) \} = \int_0^{\infty} T(x, t) \cdot e^{-pt} dt. \quad (32)$$

В результате (31) получается неоднородное (при произвольных начальных условиях) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно изображения $\bar{T}(x, p)$

$$p\bar{T}(x, p) - T(x, 0) = a \frac{d^2 \bar{T}(x, p)}{dx^2}. \quad (33)$$

2. Находится общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения (33) в пространстве изображений $\bar{T}(x, p)$ (методика решения дифференциальных уравнений второго и высших порядков изучается в курсе математического анализа).

Общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного.

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения второго (или высшего) порядка на основании замены $\frac{d^n \bar{T}(x, p)}{dx^n} \rightarrow r^n$ составляет характеристическое алгебраическое уравнение (в рассматриваемом случае квадратное уравнение). Каждому корню соответствует своё решение, линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными C_1 и C_2 является общим решением однородного уравнения.

2.2. Находится частное решение неоднородного уравнения, соответствующее правой части неоднородного уравнения методом вариации или методом Коши. Если уравнения правая часть уравнения имеет специальный вид (что встречается достаточно часто), решение может быть найдено простыми алгебраическими приёмами.

2.3. Записывается общее решение неоднородного уравнения, как сумма общего решения однородного уравнения и полученного частного решения неоднородного. Результат будет содержать две неизвестные C_1 и C_2 .

3. Определяется частное решение неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Для этого с помощью преобразования Лапласа граничные условия переводятся в пространство изображений, откуда в результате совместного решения двух полученных уравнений находятся значения C_1 и C_2 .

4. При помощи таблицы обратных преобразований Лапласа или теоремы разложения находится оригинал решения $T(x, t)$.

